**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ   
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

**МОСКОВСКИЙ АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ**

**(национальный исследовательский университет)**

**Институт №7 «**Робототехнические и интеллектуальные системы**»**

**Кафедра 704**

**Курсовая работа**

**на тему «Эволюции популяции хищников и жертв»**

по курсу «Основы статистической динамики

интегрированных информационных систем летательных аппаратов»

Вариант №3.22

Выполнил:  
Студент группы М7О-308С

Князев Р.О.

Принял:

профессор кафедры 704

М.Н. Красильщиков

Проверил: доцент кафедры 704

Е.В. Акимов

Москва, 2020

**Введение**

Математическая модель Вольтерры – Лотки описывает совместное существования двух биологических видов типа «хищник-жертва»:

Параметры системы, характеризующие взаимодействие видов, принимают значение:

На динамику популяций жертв и хищников оказывают влияние случайные процессы и , обладающие следующими статистическими характеристиками:

Периодически проводится подсчет численности хищников со случайной центрированной гауссовской ошибкой, обладающей СКО 2% от ее общей численности.

Требуется на основе статистической обработки результатов измерений с использованием соотношений дискретного фильтра Калмана оценивать динамику численности популяции.

**Расчет формирующего фильтра**

Формирующим фильтром называется динамическая си­стема или ее модель, реализованная на ЭВМ, свойства которой по­добраны так, что при подаче на вход системы белого шума ν(t) на выходе получается случайный процесс ξ(t) с заданными статисти­ческими характеристиками.

Отсюда формирующий фильтр процесса :

Отсюда формирующий фильтр процесса :

**Математические модели**

Модель движения в форме Коши:

Из уравнений видно, что система – нелинейная, поэтому вид вектора состояния X = следующий:

Где Fi, i + 1 – нелинейная переходная функция, связывающая вектор состояния в момент времени ti c вектором состояния в момент времени ti+1;

Xi – Вектор состояния в i-й момент времени

– Вектор случайных независимых центрированных воздействий на систему в i-й момент времени

– матрица влияния случайных воздействий в момент времени на вектор состояния системы в момент времени .

Однако, если линеаризовать модель движения в окрестности опорной траектории, то значение вектора состояния в момент времени ti+1 можно выразить следующим соотношением:

Где Фi,i+1 будет матрицей перехода вектора состояния от состояния i к состоянию i+1. Соответственно, в силу нелинейности системы, матрица Ф будет требовать пересчета на каждом шаге.

Модель измерений

В отличие от модели движения, модель измерения в нашем случае – линейная.

Оценивание выполняется на основе статистической обработки результатов измерений , линейно связанных с вектором состояния, и искаженных аддитивной несмещенной ошибкой η:

Где – матрица, связывающая векторы состояния и измерений в один и тот же момент времени

**Фильтр Калмана**

Коррекция

Основу Фильтра Калмана составляют соотношения коррекции, являющиеся результатом минимизации ковариационной матрицы апостериорной плотности распределения оценки вектора состояния системы :

где Dη – ковариационная матрица вектора случайных ошибок.

апостериорная оценка ковариационной матрицы вектора состояния

априорная оценка ковариационной матрицы вектора состояния

апостериорная оценка вектора состояния

априорная оценка вектора состояния

Прогноз

Дополняя соотношения коррекции соотношениями прогноза, основанными на линейных свойствах модели эволюции системы:

где – ковариационная матрица вектора случайных воздействий.

матрица перехода, определяющая изменение вектора состояния системы от момента времени к моменту времени .

- матрица влияния случайных воздействий в момент времени на вектор состояния система в момент времени

Определим значение используемых матриц.

В качестве начального значения вектора прогноза, возьмем вектор измерения в нулевой момент времени:

X­­0­­­­\* = Y0 =

А в качестве начального значения прогноза ковариационной матрицы возьмем следующую матрицу:

P0\* =

В ходе фильтрации, в силу нелинейности системы, не требует пересчета лишь одна матрица Hi, которая задает линейную зависимость истинного вектора состояния и вектора измерений. В нашем случае, где истинная популяция хищников искажается лишь центрированной гауссовской ошибкой, матрица Н примет вид:

H = (0, 1)

Матрица влияния случайных воздействий Li, в силу мультипликативности случайных воздействий, учитывая СДУ, примет вид:

Li, i+1 =

Ковариационная матрица случайных воздействий, т.к. измерению подвергается лишь одна компонента вектора состояния, будет состоять из одного элемента – дисперсии самой ошибки.

Где (из условия)

Чтобы понять вид матрицы Ф обратимся к дифференциальным уравнениям, задающим движение системы:

Рассмотрим первое уравнение:

Очевидно, значение элемента x в момент времени ti+1 задается следующим соотношением:

Из уравнения:

Тогда

Выполним простое преобразование уравнения выше:

Получается, что мы привели исходное ДУ к виду:

Аналогично для y:

Таким образом, мы привели соотношения для вектора X к желаемому виду:

Где Ф = , а L, как сказано выше, равна

**Проверка наблюдаемости системы**

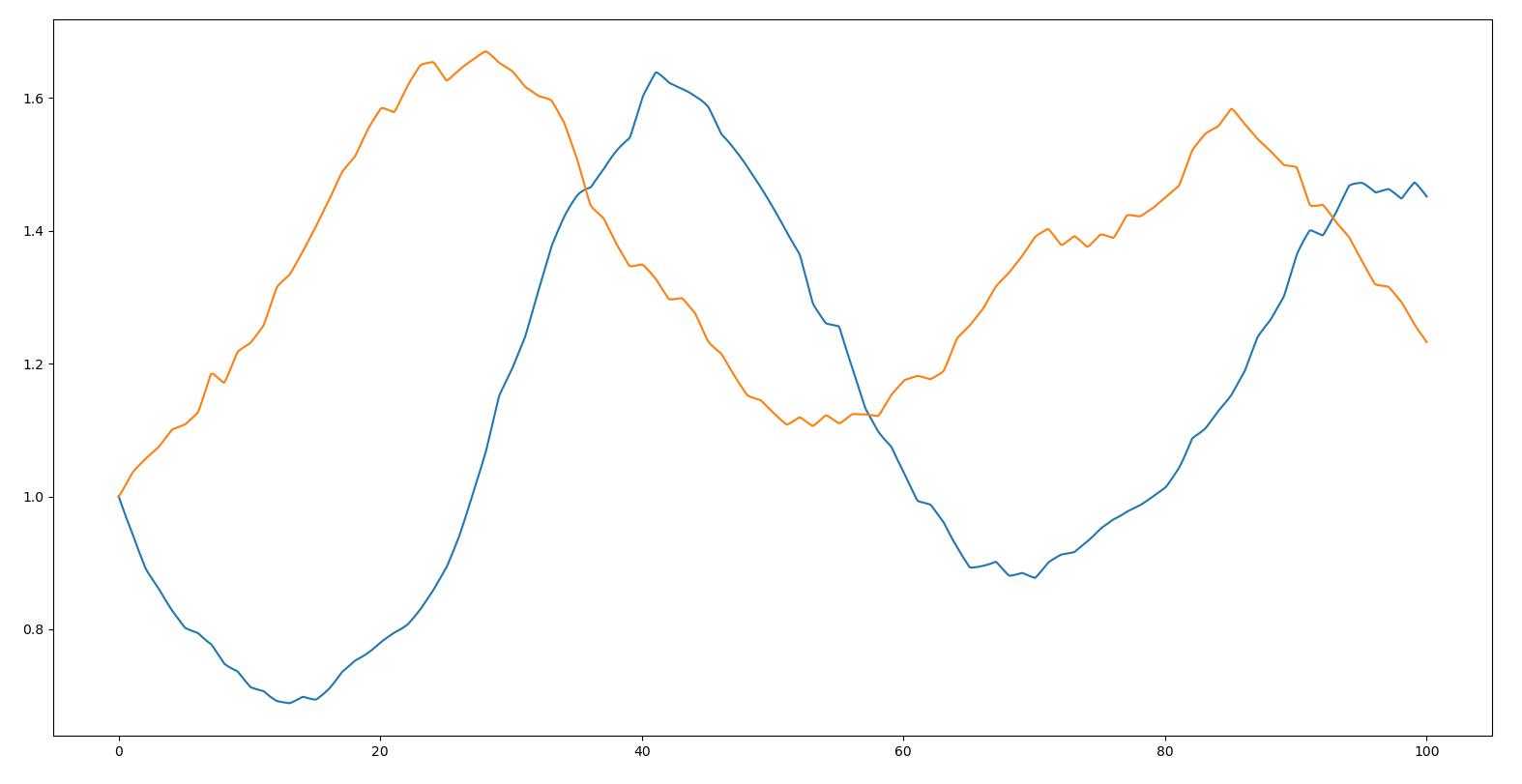
Проверим наблюдаемость системы. Для этого составим матрицу вида:

В нашем случае n = 2, поэтому

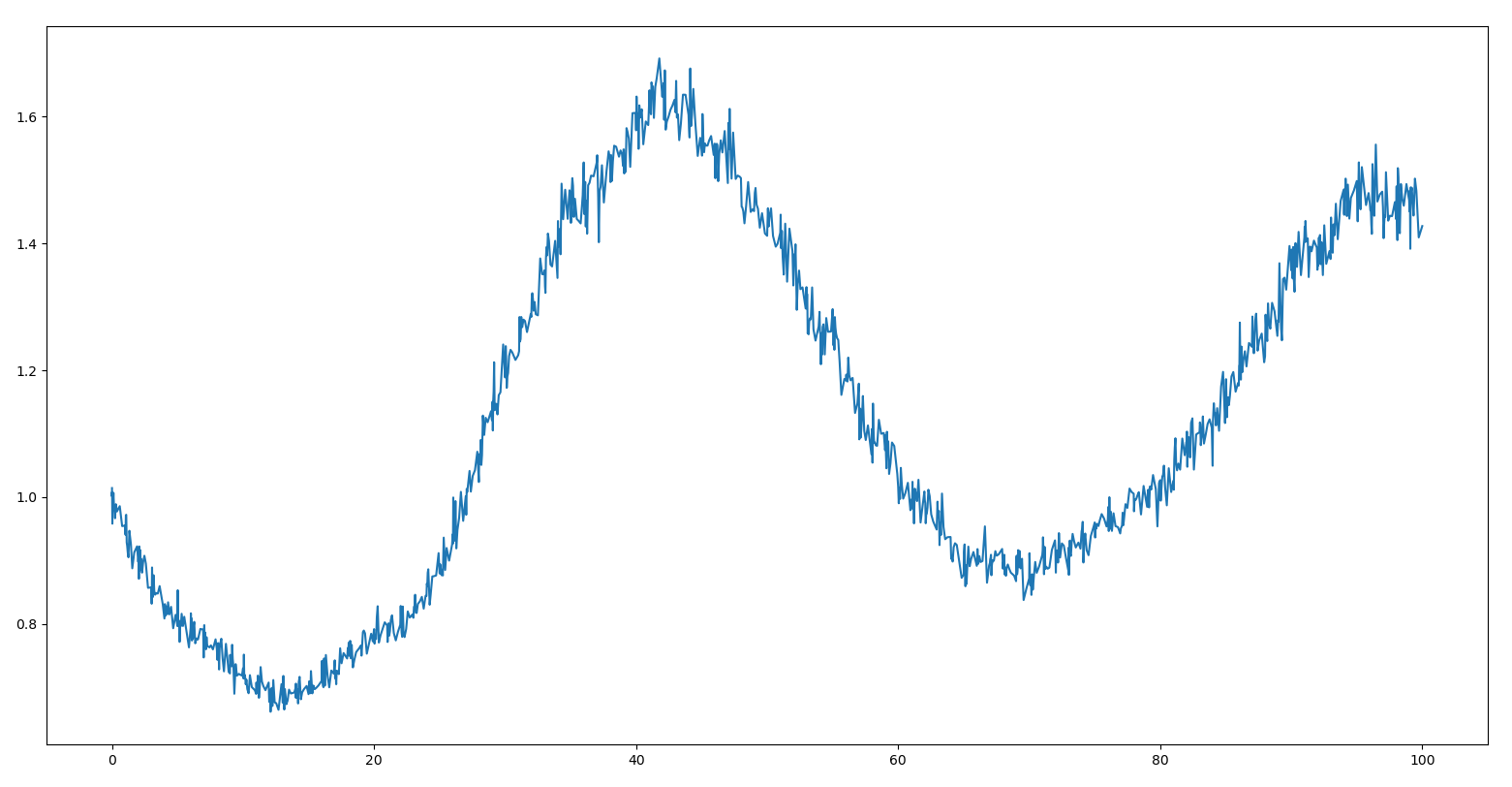
По критерию наблюдаемости, если ранг матрицы равен n, то система наблюдаема. В нашем случае это условие выполняется.

**Порядок процесса моделирования**

Первым делом, чтобы получить массив измерений, смоделируем истинное поведение системы:



Затем возьмем отсюда массив состояний популяции хищников, и, дабы симулировать процесс реальных измерений, исказим каждое значение случайной ошибкой (как в условии):



Затем применим алгоритм фильтрации, описанный выше.

Пусть в данный момент мы находимся на шаге i = 1.

Для прогноза требуется апостериорная оценка вектора состояния и ковариационной матрицы на предыдущем шаге, однако в начала она нам неизвестна, поэтому, в качестве замены, возьмем вектор измерения X­­0­­­­\* = Y0 = и предполагаемую ковариационную матрицу P0\* = .

Далее сам прогноз:

Где i = 0.

И последующая коррекция, уже на текущем шаге (i = 1):

Уже на следующем шаге (i = 2) в качестве апостериорной оценки, очевидно, мы берем значения X1 и P1

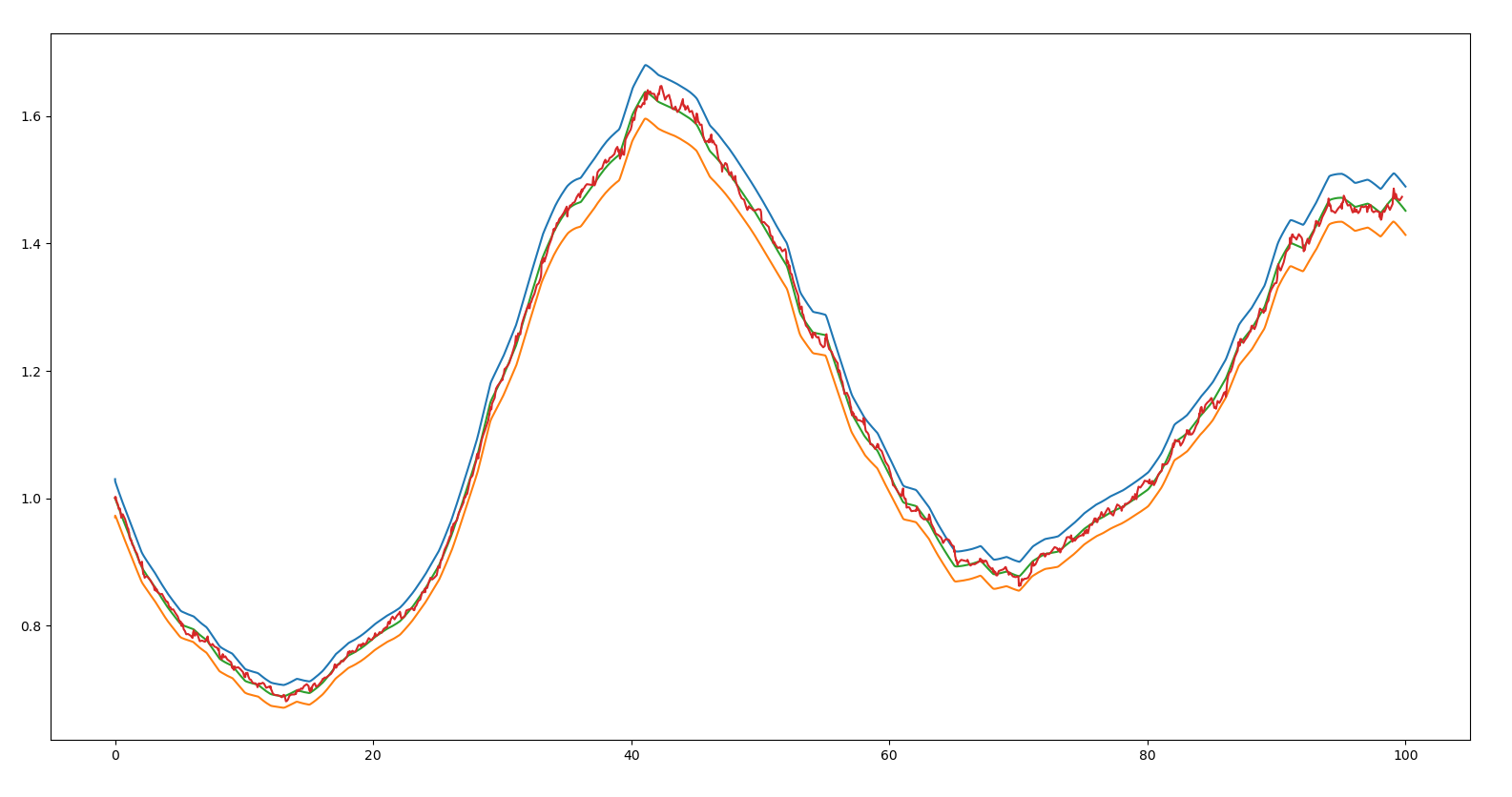
Затем повторяем алгоритм до тех пор, пока заданы значения вектора измерений.

Конкретно в нашем случае, где на периоде моделирования равном 100с массив измерений равен 1187 элементов, мы доходим до значения i = 1186.

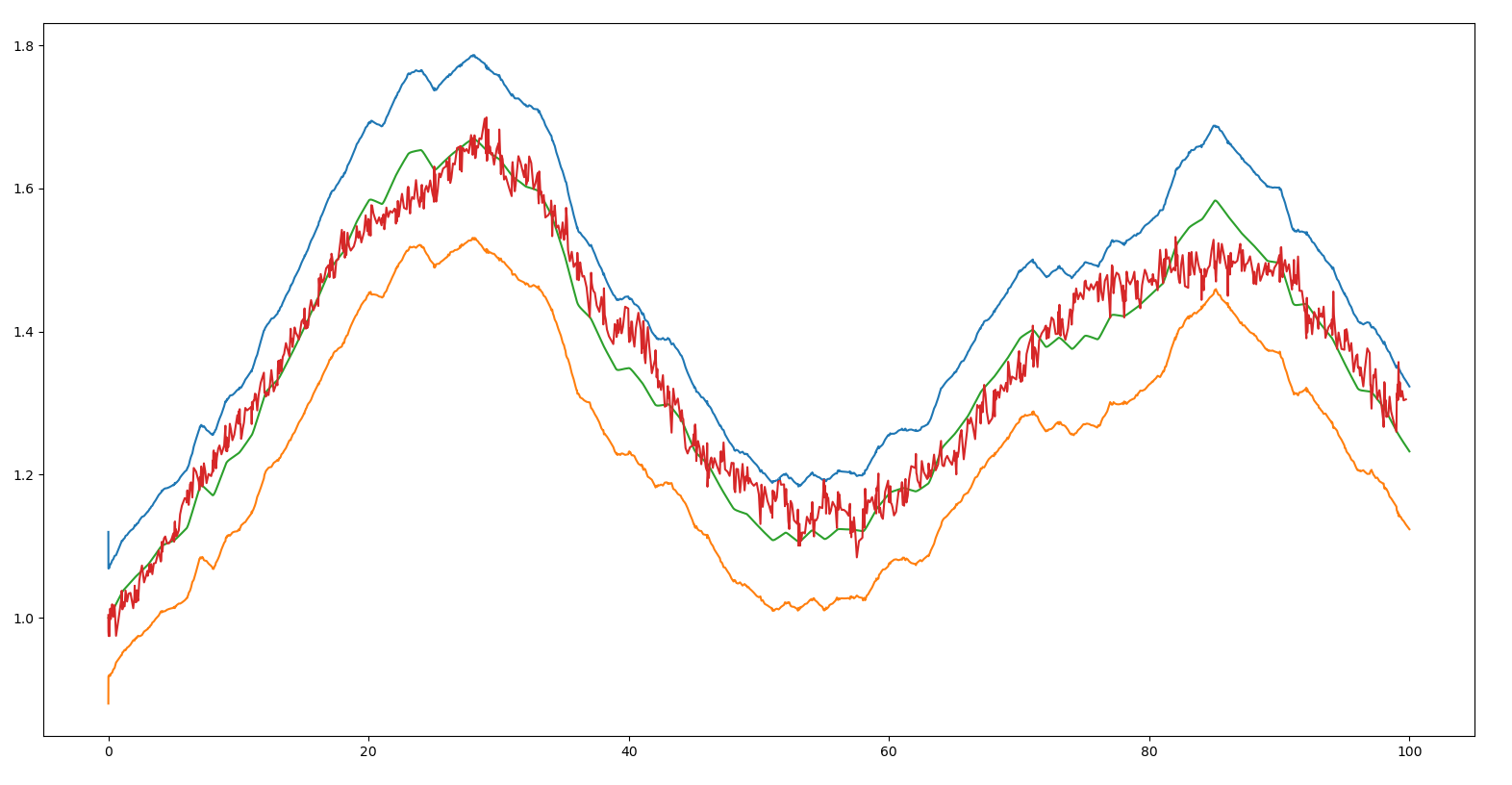
**Результаты**

В конечном итоге были получены следующие результаты.

Эволюция популяции хищников:



Эволюция популяции жертв:



**Вывод**

Был изучен алгоритм фильтр Калмана (дискретная форма). На основе этого алгоритма было разработано программное обеспечение. С использованием данного обеспечения было проведено оценивание популяции хищников и их жертв.

На основе проведённого моделирования также получены графики эволюции компонент оцениваемого вектора. Алгоритм ФК позволяет оценить неизвестные параметры вектора состояния системы, для которых нет измерений, через функциональную зависимость. Попадания невязки в +-3\*СКО () подтверждает корректность поставленной задачи и работы алгоритма ФК.